Pavel A. Rahman, 2014 ©

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ ДИСКОВЫХ МАССИВОВ RAID-0, RAID-5, RAID-6 и RAID-1

ВВЕДЕНИЕ

Современный мир практически невозможно представить без технических систем, ставших неотъемлемой частью как повседневной жизни и профессиональной деятельности человека, так и ключевыми элементами различных предприятий и отраслей экономики.

Помимо функциональных возможностей и основных технических характеристик, которые в первую очередь интересуют конечных потребителей и производителей, таких как: производительность, мощность, емкость и т.п., не менее важными являются показатели надежности, так как от них напрямую зависит эффективность и безопасность эксплуатации технических систем. Соответственно, разработка моделей и методов для расчета показателей надежности систем является актуальной и критически важной задачей.

На сегодняшний день имеется множество учебников и научных трудов, как отечественных [1, 2], так и зарубежных [3, 4, 5], посвященных основам теории надежности, общим и специализированным моделям и методам расчета показателей надежности систем. Одной из самых распространенных моделей восстанавливаемых технических систем является модель на базе цепей Маркова, позволяющих оценить такие показатели надежности системы как: коэффициент готовности, среднее время наработки на отказ, среднее время восстановления. В случае если система состоит из нескольких идентичных элементов, то в таком случае часто применяется хорошо известная марковская цепь гибели и размножения.

Однако следует особо отметить, что существуют системы, которые при достижении аварийного состояния не могут вернуться в предыдущее работоспособное состояние после замены минимально необходимого одного элемента, и требуют проведения ремонтных работ до исходного полностью исправного состояния. Примером таких систем являются дисковые системы RAID (избыточный массив недорогих дисков), состоящий из n дисков, устойчивый к отказам до $s - 1$ дисков, и отказывающий вместе с потерей всех данных при отказе s и более дисков, и требующий пересоздания массива «с нуля» и восстановления данных из резервной копии. Более того, «узким местом» надежности таких систем также является схема управления (контроллер) дискового массива, критические ошибки которого могут приводить систему в аварийное состояние из любого работоспособного состояния. Очевидно, что для таких систем традиционная марковская цепь гибели и размножения не совсем подходит, и требуется специальная марковская цепь.

В последние годы автором был проведен ряд исследований в области анализа показателей надежности современных систем хранения, передачи и обработки информации, состоящих из нескольких идентичных элементов [6, 7, 8], в которых также использовалась традиционная марковская цепь гибели и размножения. В частности, она использовалась для оценки среднего времени наработки до потери данных для RAID-массивов. Однако, в этом исследовании не учитывалась возможность ошибок контроллера дискового массива и возможность восстановления из аварийного состояния с помощью резервной копии данных. Соответственно, при работе с RAID-массивами, требующими ремонта до исходного исправного состояния с восстановлением данных из резервной копии после достижения аварийного состояния после отказа s дисков или критической ошибки контроллера, возникла научная задача разработки специальных марковских моделей надежности.

В рамках статьи рассмотрены предложенные автором специальные марковские модели и выведенные формулы для расчета показателей надежности системы, состоящей из множества идентичных восстанавливаемых элементов, переходящей в состояние аварийного отключения с потерей информации при отказе s элементов или критической ошибке схемы управления, и требующей восстановления до исходного полностью исправного состояния.

Также рассмотрены модели отказоустойчивых систем хранения данных на базе RAID-массивов с резервной копией данных, частные случаи дисковых массивов RAID-0, RAID-5, RAID-6 и RAID-1, а также примеры расчета показателей надежности.

Следует особо отметить, при разработке моделей был сделан упор на аналитическую разрешимость моделей и выведение расчетных формул, чтобы у специалистов была возможность быстрой оценки показателей надежности систем хранения данных, не прибегая к специальному математическому моделированию и программному обеспечению.

1. СПЕЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОЙ СИСТЕМЫ (ТИП 1)

Пусть задана система, состоящая из множества идентичных элементов. Пусть система сохраняет работоспособность при отказе не более $s-1$ элементов.

Интенсивности перехода системы из состояния $j = 0 \ldots s-1$ в состояние $j+1$ по причине отказа очередного элемента будем обозначать λ_j. Интенсивности перехода системы из состояния $j = 1 \ldots s-1$ в состояние $j-1$ по причине восстановления очередного элемента будем обозначать μ_j.

Кроме того, пусть в системе возможны критические виды ошибок (ошибки схемы управления системы), которые переводят систему из любого работоспособного состояния $j = 0 \ldots s-1$ напрямую в аварийное состояние s. Интенсивности перехода из работоспособных состояний в аварийное состояние по причине критической ошибки будем обозначать σ_j.

Пусть при отказе s элементов или критической ошибке схемы управления система переходит в аварийное состояние s с потерей информации, и требуется восстановление системы, приводящее ее в исходное полностью исправное состояние 0, включая восстановление информации из резервной копии. Интенсивность восстановления системы из аварийного состояния будем обозначать γ.

Тогда специальная марковская модель отказоустойчивой системы (рис. 1):

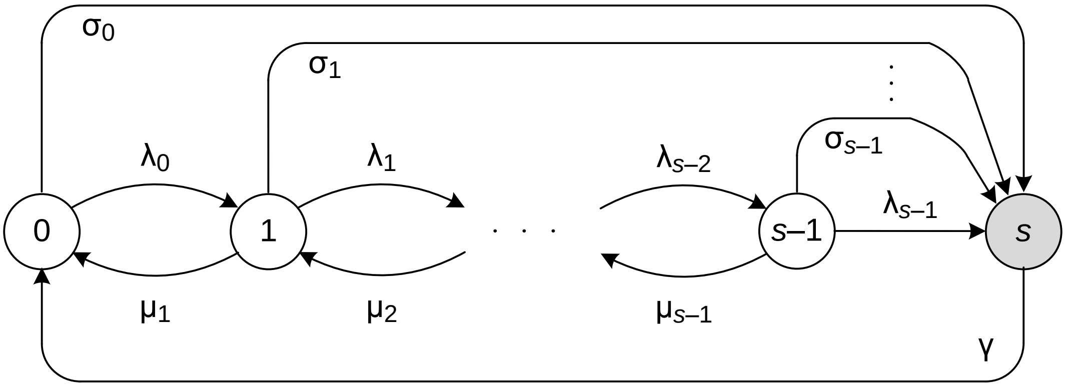

Рис. 1. Граф состояний отказоустойчивой системы (тип 1).

Соответственно, математическая модель (система уравнений Колмогорова-Чепмена) для расчета стационарных вероятностей состояний:

$$
\begin{cases}
P_0 + P_1 + \ldots + P_{s-1} + P_s = 1; \\
-(\lambda_0 + \sigma_0)P_0 + \mu_1 P_1 + \gamma P_s = 0; \\
\lambda_0 P_0 - (\mu_1 + \lambda_1 + \sigma_1)P_1 + \mu_2 P_2 = 0; \\
\vdots \\
\lambda_{s-3}P_{s-3} - (\mu_{s-2} + \lambda_{s-2} + \sigma_{s-2})P_{s-2} + \mu_{s-1}P_{s-1} = 0; \\
\lambda_{s-2}P_{s-2} - (\mu_{s-1} + \lambda_{s-1} + \sigma_{s-1})P_{s-1} = 0; \\
\sigma_0 P_0 + \ldots + \sigma_{s-2}P_{s-2} + (\lambda_{s-1} + \sigma_{s-1})P_{s-1} - \gamma P_s = 0.
\end{cases}
\tag{1}
$$

Тогда, стационарный коэффициент готовности системы:

$$K_{\Gamma} = \sum_{j=0}^{s-1} P_j .$$

Далее, учитывая, что система из аварийного состояния может перейти только в начальное состояние с интенсивностью γ, имеем среднее время восстановления системы:

$$T_{\text{В}} = 1/\gamma .$$

Наконец, среднее время наработки на отказ системы может быть определено из тождества $K_{\Gamma} = T_{\text{О}}/(T_{\text{О}} + T_{\text{В}})$:

$$T_{\text{О}} = K_{\Gamma}/(\gamma(1 - K_{\Gamma})).$$

Заметим, что решение системы для нахождения стационарных вероятностей является трудоемкой процедурой, обладающей кубической вычислительной сложностью ~2(s+1)^3.

В результате исследований автору удалось вывести аналитическое решение системы для общего случая в виде матричной формулы. Формула включает в себя произведение s квадратных матриц размерности 3, содержащих все параметры надежности. Матричная формула имеет линейную вычислительную сложность ~138s. В итоге получается матрица, содержащая пять коэффициента U, V, W, M и D, и два из них, M и D, используются для вычисления коэффициента готовности системы и среднего времени наработки на отказ:

$$\mathbf{\Psi} = \prod_{j=1}^{s-1} \begin{bmatrix} \lambda_{s-j} & 0 & 0 \\ 1 & \mu_{s-j} & \sigma_{s-j} \\ 1 & \mu_{s-j} & \lambda_{s-j} + \sigma_{s-j} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} U & 0 & 0 \\ V & 0 & W \\ M & 0 & D \end{bmatrix} = \mathbf{\Psi} \times \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sigma_0 \\ 1 & 0 & \lambda_0 + \sigma_0 \end{bmatrix}; \qquad (2)$$

$$K_{\Gamma} = \frac{\gamma M}{\gamma M + D}; \quad T_{\text{О}} = \frac{M}{D}; \quad T_{\text{В}} = \frac{1}{\gamma}.$$

Теперь заметим, что перемножение матриц можно значительно оптимизировать, учитывая то, что часть ячеек содержат 0 или 1, а также то, что операция умножения матриц обладает свойством ассоциативности $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Автором был выведена рекуррентная схема вычисления коэффициентов M и D, также обладающая линейной вычислительной сложностью ~36(s–1), но вычисляющая значительно быстрее матричной формулы:

$$\begin{cases} U^{(1)} = \lambda_0; \quad V^{(1)} = 1; \quad M^{(1)} = 1; \\ W^{(1)} = \sigma_0; \quad D^{(1)} = \lambda_0 + \sigma_0; \\ r = 1 \ldots s-1; \\ \begin{cases} U^{(r+1)} = \lambda_r U^{(r)}; \\ V^{(r+1)} = \sigma_r M^{(r)} + \mu_r V^{(r)} + U^{(r)}; \\ M^{(r+1)} = \lambda_r M^{(r)} + V^{(r+1)}; \\ W^{(r+1)} = \sigma_r D^{(r)} + \mu_r W^{(r)}; \\ D^{(r+1)} = \lambda_r D^{(r)} + W^{(r+1)}; \end{cases} \\ M = M^{(s)}; \quad D = D^{(s)}; \end{cases} \qquad (3)$$

$$K_{\Gamma} = \frac{\gamma M}{\gamma M + D}; \quad T_{\text{О}} = \frac{M}{D}; \quad T_{\text{В}} = \frac{1}{\gamma}.$$

Следует особо отметить, что и матричная формула, и рекуррентный алгоритм может использоваться не только для вычисления численных значений, но и для выведения аналитических формул для конкретных частных случаев порога s.

В частности, при $s = 1$:

$$\begin{cases} M = 1; \\ D = \lambda_0 + \sigma_0. \end{cases}$$

При $s = 2$:

$$\begin{cases} M = \lambda_0 + \lambda_1 + \sigma_1 + \mu_1; \\ D = (\lambda_0 + \sigma_0)(\lambda_1 + \sigma_1) + \sigma_0\mu_1. \end{cases}$$

При $s = 3$:

$$\begin{cases} M = \lambda_0\lambda_1 + (\lambda_0 + \lambda_1 + \sigma_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \sigma_2) + (\lambda_0 + \sigma_1 + \mu_1)\mu_2; \\ D = ((\lambda_0 + \sigma_0)(\lambda_1 + \sigma_1) + \sigma_0\mu_1)(\lambda_2 + \sigma_2) + ((\lambda_0 + \sigma_0)\sigma_1 + \sigma_0\mu_1)\mu_2. \end{cases}$$

Также приведем наглядную схему алгоритма вычисления показателей надежности (рис. 2) на базе рекуррентной схемы вычисления коэффициентов M и D.

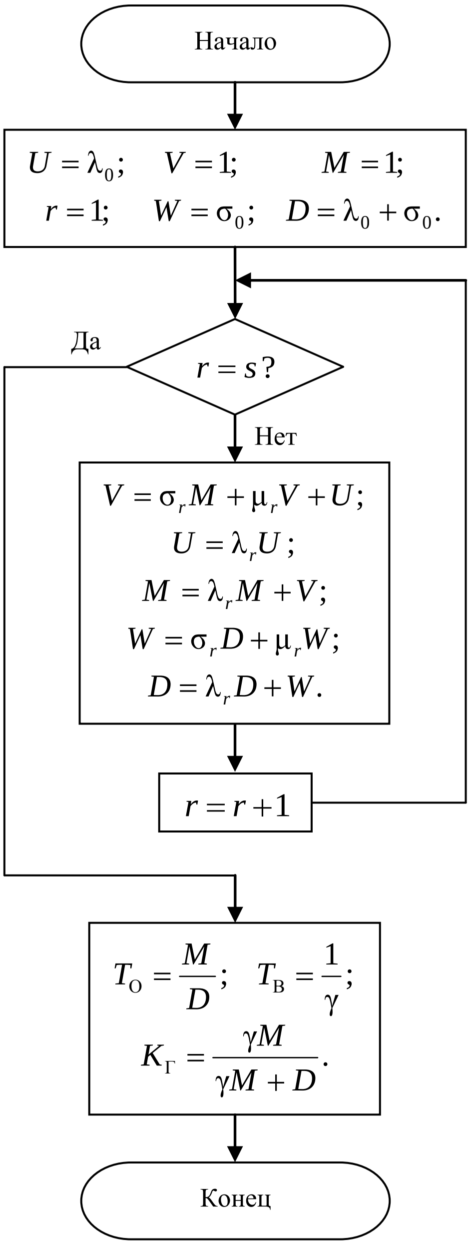

Рис. 2. Схема алгоритма вычисления показателей надежности.

2. СПЕЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОЙ СИСТЕМЫ (ТИП 2)

Пусть задана система, состоящая из множества идентичных элементов. Пусть система сохраняет работоспособность при отказе не более s – 1 элементов.

Интенсивности перехода системы из состояния j = 0…s – 1 в состояние j + 1 по причине отказа очередного элемента будем обозначать λ_j.

Пусть все отказавшие элементы всегда восстанавливаются совместно в рамках единого восстановительного процесса, который завершается полным восстановлением системы с возвратом в исходное полностью исправное состояние 0. Интенсивности перехода системы из состояния j = 1…s – 1 в исходное состояние 0 будем обозначать μ_j.

Кроме того, пусть в системе возможны критические виды ошибок (ошибки схемы управления системы), которые переводят систему из любого работоспособного состояния j = 0…s – 1 сразу в аварийное состояние s. Интенсивности перехода из работоспособных состояний в аварийное состояние по причине критического ошибки будем обозначать σ_j.

Пусть при отказе s элементов или критической ошибке схемы управления система переходит в аварийное состояние s с потерей информации, и требуется восстановление системы, приводящее ее в исходное полностью исправное состояние 0, включая восстановление информации из резервной копии. Интенсивность восстановления системы из аварийного состояния будем обозначать γ.

Тогда специальная марковская модель отказоустойчивой системы (рис. 3):

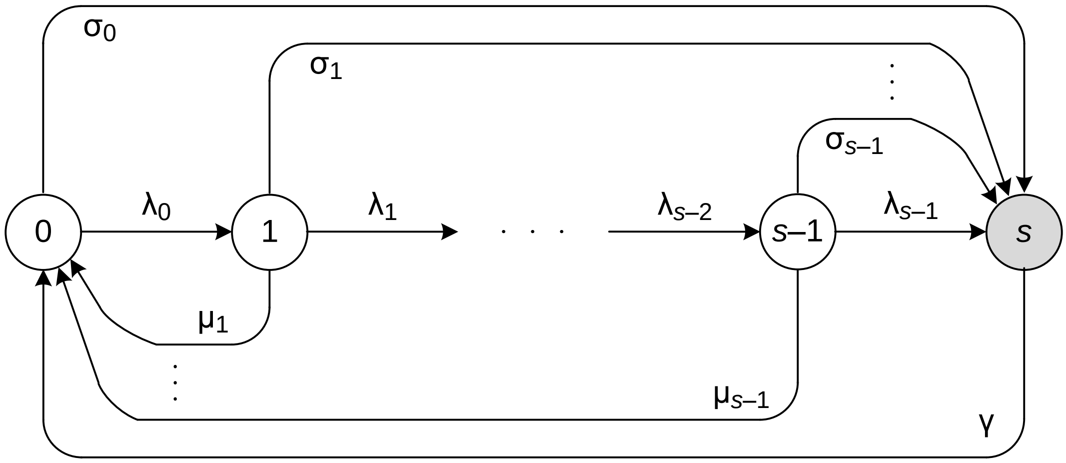

Рис. 3. Граф состояний отказоустойчивой системы (тип 2).

Соответственно, математическая модель (система уравнений Колмогорова-Чепмена) для расчета стационарных вероятностей состояний:

$$\begin{cases} P_0 + P_1 + \ldots + P_{s-1} + P_s = 1; \\ -(\lambda_0 + \sigma_0)P_0 + \mu_1 P_1 + \ldots + \mu_{s-1} P_1 + \gamma P_s = 0; \\ \lambda_0 P_0 - (\mu_1 + \lambda_1 + \sigma_1) P_1 = 0; \\ \vdots \\ \lambda_{s-2} P_{s-2} - (\mu_{s-1} + \lambda_{s-1} + \sigma_{s-1}) P_{s-1} = 0; \\ \sigma_0 P_0 + \ldots + \sigma_{s-2} P_{s-2} + (\lambda_{s-1} + \sigma_{s-1}) P_{s-1} - \gamma P_s = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Учтем, что стационарный коэффициент готовности системы $K_\Gamma = \sum_{j=0}^{s-1} P_j$, а также то, что система из аварийного состояния может перейти только в начальное состояние с интенсивностью γ, и, соответственно, среднее время восстановления системы $T_B = 1/\gamma$, и, тогда, наконец, среднее время наработки на отказ системы $T_O = K_\Gamma / (\gamma(1 - K_\Gamma))$.

В результате исследований автору удалось вывести аналитическое решение системы, и, соответственно, стационарный коэффициент готовности, среднее время наработки на отказ и среднее время восстановления системы определяются следующим образом:

$$\begin{cases} M = \sum_{q=0}^{s-1} \frac{1}{\lambda_q} \prod_{j=1}^{s-1-q} \left(1 + \frac{\mu_{q+j} + \sigma_{q+j}}{\lambda_{q+j}}\right); \\ D = 1 + \sum_{q=0}^{s-1} \frac{\sigma_q}{\lambda_q} \prod_{j=1}^{s-1-q} \left(1 + \frac{\mu_{q+j} + \sigma_{q+j}}{\lambda_{q+j}}\right); \end{cases} \tag{5}$$

$$K_{\Gamma} = \frac{\gamma M}{\gamma M + D}; \quad T_{\mathrm{O}} = \frac{M}{D}; \quad T_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\gamma}.$$

3. МОДЕЛИ ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМ ХРАНЕНИЯ ДАННЫХ НА БАЗЕ ДИСКОВЫХ МАССИВОВ С ЧЕРЕДОВАНИЕМ ДАННЫХ

Пусть задана некоторая система хранения данных на базе дискового массива RAID избыточного массива недорогих дисков с чередованием данных (технология striping), состоящего из n одинаковых дисков, и резервной копии данных на некотором внешнем хранилище (мы его оставляем за рамками рассматриваемой модели).

На каждом диске $(n - s + 1) / n$ часть дискового пространства отводится для хранения пользовательских данных, а $(s - 1) / n$ часть диска – для хранения избыточной информации, вычисляемой по специальным алгоритмам из пользовательских данных других дисков, и позволяющей автоматически рассчитывать «недостающую» информацию при отказе вплоть до $s - 1$ дисков за счет избыточной информации.

Интенсивность отказов дисков λ. Диски могут отказывать независимо друг от друга. Кроме того, пусть при отказе $r = 1 \ldots s - 1$ дисков, помимо базовой интенсивности отказов становится существенной интенсивность ошибок чтения ε диска, поскольку для расчета «недостающей» информации требуются все пользовательские и избыточные данные со всех оставшихся $n - r$ дисков.

Интенсивность регенерация информации (процедура rebuild) на замененном диске за счет избыточных данных составляет μ. Будем считать, что время замены отказавшего диска несущественно по сравнению со временем регенерации информации за счет использования технологии автоматической горячей замены дисков (hot-spare).

Для систем с $s \geq 3$ при отказе нескольких $r = 2 \ldots s - 1$ дисков будем различать два типа регенерации информации на замененных дисках:

- Тип 1. Информация на замененных дисках регенерируется последовательно – сначала регенерируется информация на одном диске, после завершения регенерации начинается регенерация на следующем диске и так далее. Соответственно, после завершения регенерации на очередном диске система переходит из состояния r в состояние $r - 1$. Интенсивность регенерации равна μ.
- Тип 2. Информация на замененных дисках регенерируется одновременно в рамках единого процесса регенерации и завершается одновременно на всех дисках. Соответственно, после завершения регенерации система переходит из состояния r в состояние 0. Будем считать, что вычислительные мощности дискового контроллера позволяют рассчитывать регенерируемую информацию и записывать ее на все диски одновременно. Соответственно, интенсивность регенерации равна μ независимо от количества регенерируемых дисков.

Особо отметим, что если до завершения регенерации информации происходит отказ очередного диска, то будем считать, что все результаты предыдущей регенерации теряются, и после замены отказавшего диска процесс регенерации начинается заново, при условии что общее количество дисков, требующих регенерации меньше критического количества s.

Кроме того, пусть в системе возможны критические виды ошибок контроллера дискового массива, которые переводят систему из любого работоспособного состояния напрямую в аварийное состояние. Интенсивность критических ошибок контроллера σ. Более того, при отказе $r = 1\ldots s - 1$ дисков, на контроллер ложится дополнительная нагрузка в силу необходимости расчета недостающей информации и регенерации данных на замененных дисках, и к базовой интенсивности ошибок добавляется дополнительная интенсивность δ.

Наконец, пусть при отказе s дисков или критической ошибке дискового контроллера система переходит в аварийное состояние, поскольку данных оставшихся дисков становится недостаточным для расчета регенерируемой информации. В этой ситуации требуется замена всех неисправных дисков, повторная инициализация дискового массива (процедура recreate), и восстановление информации из резервного копии внешнего хранилища. Интенсивность восстановления системы из аварийного состояния γ.

Тогда с учетом всего вышесказанного марковская модель отказоустойчивой дисковой системы с последовательной регенерацией информации на замененных дисках (тип 1) выглядит следующим образом (рис. 4):

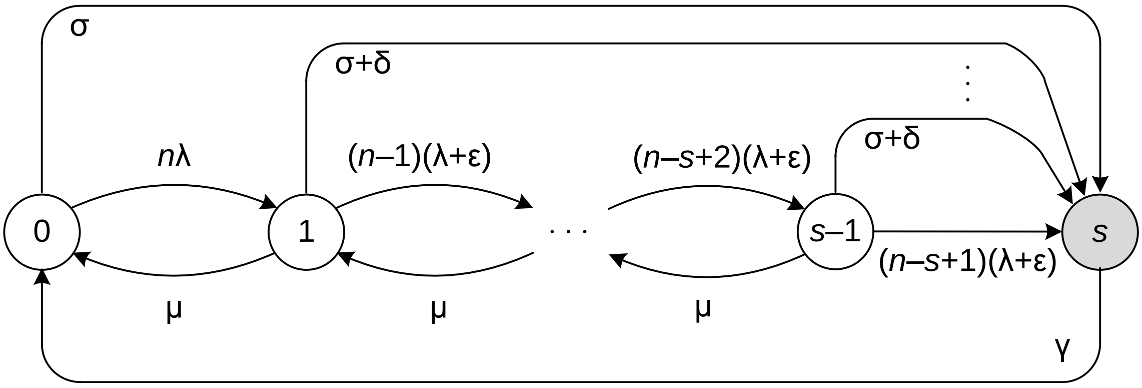

Рис. 4. Граф состояний отказоустойчивой дисковой системы (тип 1).

Модель отказоустойчивой дисковой системы получается из рассмотренной выше специальной модели 1-го типа путем следующей подстановки параметров надежности:

$$\begin{cases} \lambda_0 = n\lambda; \quad \lambda_j = (n-j)(\lambda+\varepsilon); \\ \sigma_0 = \sigma; \qquad \sigma_j = \sigma + \delta; \\ \gamma = \gamma; \qquad \mu_j = \mu; \\ \qquad j = 1\ldots s-1. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда, расчет показателей надежности для модели 1-го типа осуществляется по рассмотренной выше рекуррентным формулам 3 с подстановкой соответствующих исходных параметров надежности системы по формулам 6:

$$\begin{cases} U^{(1)} = n\lambda; \quad V^{(1)} = 1; \quad M^{(1)} = 1; \\ W^{(1)} = \sigma; \quad D^{(1)} = n\lambda + \sigma; \\ r = 1\ldots s-1; \\ \begin{cases} U^{(r+1)} = (n-r)(\lambda+\varepsilon)U^{(r)}; \\ V^{(r+1)} = (\sigma+\delta)M^{(r)} + \mu V^{(r)} + U^{(r)}; \\ M^{(r+1)} = (n-r)(\lambda+\varepsilon)M^{(r)} + V^{(r+1)}; \\ W^{(r+1)} = (\sigma+\delta)D^{(r)} + \mu W^{(r)}; \\ D^{(r+1)} = (n-r)(\lambda+\varepsilon)D^{(r)} + W^{(r+1)}; \end{cases} \\ M = M^{(s)}; \quad D = D^{(s)}; \end{cases} \tag{7}$$

$$K_{\text{Г}} = \frac{\gamma M}{\gamma M + D}; \quad T_{\text{О}} = \frac{M}{D}; \quad T_{\text{В}} = \frac{1}{\gamma}.$$

Аналогично, марковская модель отказоустойчивой дисковой системы с регенерацией информации в рамках единого одновременного процесса на всех замененных дисках (тип 2) выглядит следующим образом (рис. 5):

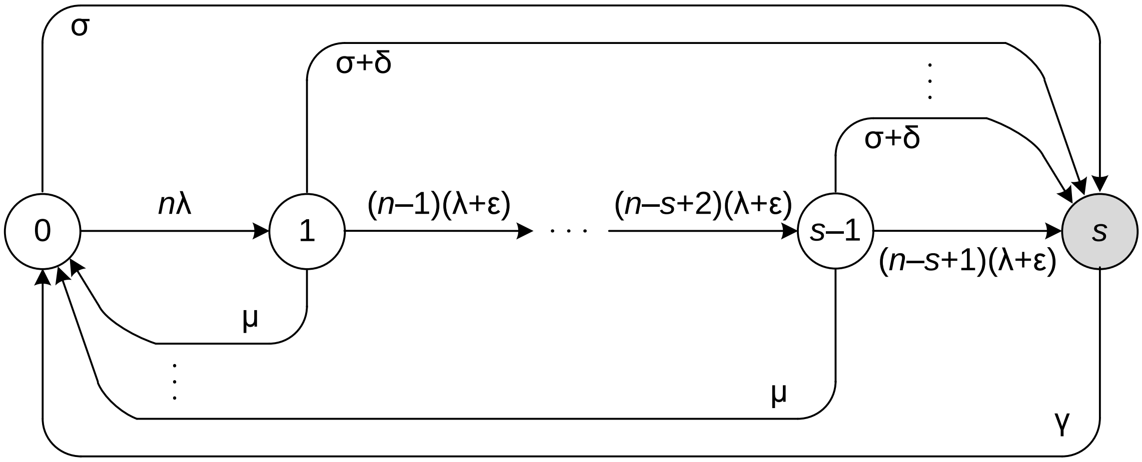

Рис. 5. Граф состояний отказоустойчивой дисковой системы (тип 2).

Модель отказоустойчивой дисковой системы получается из рассмотренной выше специальной модели 2-го типа путем аналогичной подстановки параметров надежности, как и в модели 1-го типа.

Тогда, расчет показателей надежности для модели 2-го типа осуществляется по рассмотренным выше формулам 5 с подстановкой соответствующих исходных параметров надежности системы по формулам 6:

$$\begin{cases} M = \sum\limits_{q=0}^{s-1} \dfrac{1}{(n-q)(\lambda+\varepsilon\min(1,q))} \prod\limits_{j=1}^{s-1-q} \left(1+\dfrac{\mu+\sigma+\delta}{(n-q-j)(\lambda+\varepsilon)}\right); \\ D = 1+\sum\limits_{q=0}^{s-1} \dfrac{\sigma+\delta\min(1,q)}{(n-q)(\lambda+\varepsilon\min(1,q))} \prod\limits_{j=1}^{s-1-q} \left(1+\dfrac{\mu+\sigma+\delta}{(n-q-j)(\lambda+\varepsilon)}\right); \end{cases} \tag{8}$$

$$K_{\Gamma} = \frac{\gamma M}{\gamma M + D}; \quad T_{\text{О}} = \frac{M}{D}; \quad T_{\text{В}} = \frac{1}{\gamma}.$$

Рассмотрим теперь подробнее, системы хранения данных на базе распространенных в практике дисковых массивов с чередованием данных RAID-0, RAID-5 и RAID-6.

RAID-0. Дисковый массив RAID-0 с резервной копией данных является частным случаем (s = 1) рассмотренной выше отказоустойчивой системы хранения данных. Массив RAID-0 собирается из $n \geq 2$ дисков, и сам по себе не обладает отказоустойчивостью. При отказе любого одного диска или критической ошибке контроллера система переходит в аварийное состояние, и требуется полное восстановление массива с переносом данных из резервной копии. Марковская модель надежности для такой системы (рис. 6):

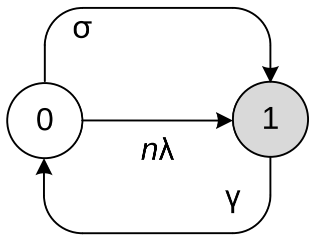

Рис. 6. Граф состояний системы на базе дискового массива RAID-0.

Заметим, поскольку s = 1, то модели обеих типов дают одну и ту же марковскую модель надежности и, соответственно, расчетные формулы также совпадают.

Тогда, используя рассмотренную выше рекуррентную схему вычисления показателей надежности для модели 1-го типа, получаем следующие расчетные формулы:

$$\begin{cases} M = 1; \\ D = n\lambda + \sigma; \end{cases}$$
$$K_{\Gamma} = \frac{\gamma M}{\gamma M + D}; \quad T_{\text{O}} = \frac{M}{D}; \quad T_{\text{B}} = \frac{1}{\gamma}. \tag{9}$$

RAID-5. Дисковый массив RAID-5 с резервной копией данных является частным случаем (s = 2) рассмотренной выше отказоустойчивой системы хранения данных. Массив RAID-5 собирается из $n \geq 3$ дисков, и обладает однодисковой отказоустойчивостью. При отказе любого одного диска система сохраняет работоспособность. При отказе любых двух дисков или критической ошибке контроллера система переходит в аварийное состояние, и требуется полное восстановление массива с переносом данных из резервной копии.

Марковская модель надежности такой системы (рис. 7):

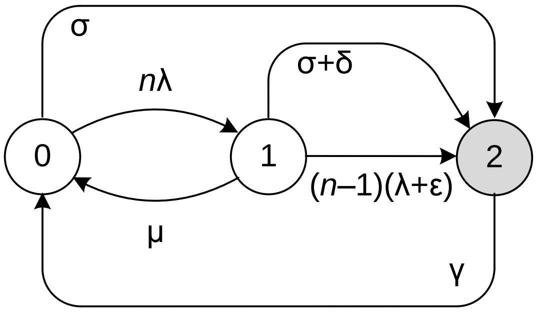

Рис. 7. Граф состояний системы на базе дискового массива RAID-5.

Заметим, поскольку s = 2, то модели обеих типов дают одну и ту же марковскую модель надежности и, соответственно, расчетные формулы также совпадают.

Тогда, используя рассмотренную выше рекуррентную схему вычисления показателей надежности для модели 1-го типа, получаем следующие расчетные формулы:

$$\begin{cases} M = \mu + (2n-1)\lambda + (n-1)\varepsilon + \sigma + \delta; \\ D = \mu\sigma + (n\lambda + \sigma)((n-1)(\lambda + \varepsilon) + \sigma + \delta); \end{cases}$$
$$K_{\Gamma} = \frac{\gamma M}{\gamma M + D}; \quad T_{\text{O}} = \frac{M}{D}; \quad T_{\text{B}} = \frac{1}{\gamma}. \tag{10}$$

RAID-6. Дисковый массив RAID-6 с резервной копией данных является частным случаем (s = 3) рассмотренной выше отказоустойчивой системы хранения данных. Массив RAID-5 собирается из $n \geq 4$ дисков, и обладает двухдисковой отказоустойчивостью. При отказе любого одного или двух дисков система сохраняет работоспособность. При отказе любых трех или критической ошибке контроллера система переходит в аварийное состояние, и требуется полное восстановление массива с переносом данных из резервной копии.

Тогда, марковская модель надежности такой системы 1-го типа с последовательной регенерацией информации при отказе двух дисков (рис. 8):

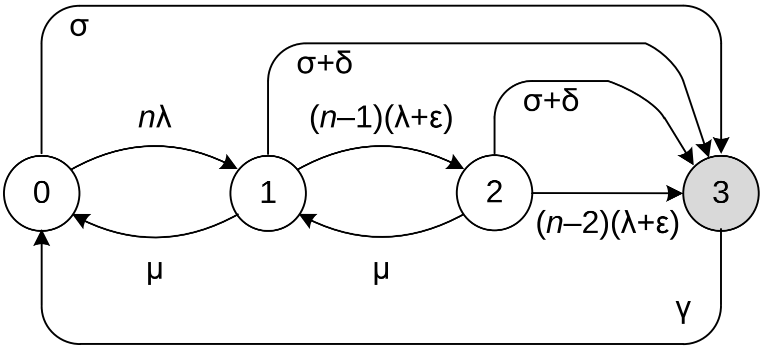

Рис. 8. Граф состояний системы на базе дискового массива RAID-6 (тип 1).

Используя рассмотренную выше рекуррентную схему вычисления показателей надежности для модели 1-го типа, получаем следующие расчетные формулы:

$$\begin{cases} M = \mu(\mu + n\lambda + \sigma + \delta) + \\ + (\mu + (2n-1)\lambda + (n-1)\varepsilon + \sigma + \delta) \times \\ \times ((n-2)(\lambda + \varepsilon) + \sigma + \delta) + n(n-1)\lambda(\lambda + \varepsilon); \\ D = \mu(\mu\sigma + (n\lambda + \sigma)(\sigma + \delta)) + \\ + (\mu\sigma + (n\lambda + \sigma)((n-1)(\lambda + \varepsilon) + \sigma + \delta)) \times \\ \times ((n-2)(\lambda + \varepsilon) + \sigma + \delta); \end{cases} \tag{11}$$

$$K_{\Gamma} = \frac{\gamma M}{\gamma M + D}; \quad T_{\text{О}} = \frac{M}{D}; \quad T_{\text{В}} = \frac{1}{\gamma}.$$

Аналогично, марковская модель надежности такой системы 2-го типа с регенерацией информации в рамках единого одновременного процесса при отказе двух дисков (рис. 9):

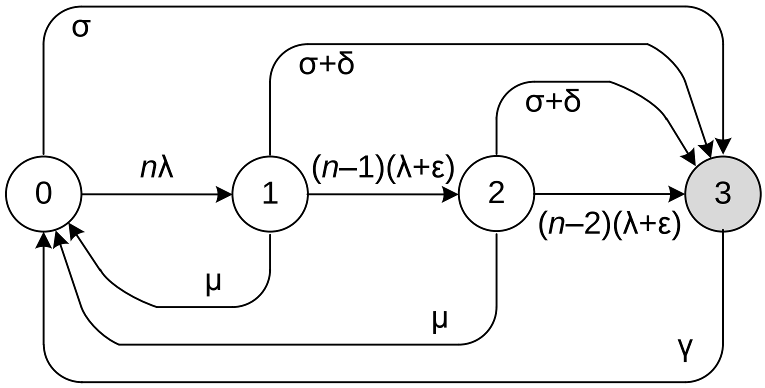

Рис. 9. Граф состояний системы на базе дискового массива RAID-6 (тип 2).

Используя рассмотренные выше формулы для вычисления показателей надежности для модели 2-го типа, получаем следующие расчетные формулы (после ряда упрощений, и исключения одного и того же знаменателя $n(n-1)(n-2)\lambda(\lambda+\varepsilon)^2$ в коэффициентах M и D, поскольку он все равно сокращается в дроби M / D при расчете показателей надежности):

$$\begin{cases} M = (\mu + (n-2)(\lambda + \varepsilon) + \sigma + \delta) \times \\ \times (\mu + (2n-1)\lambda + (n-1)\varepsilon + \sigma + \delta) + \\ + n(n-1)\lambda(\lambda + \varepsilon); \\ D = (\sigma(\mu + (2n-1)\lambda + (n-1)\varepsilon + \sigma + \delta) + n\lambda\delta) \times \\ \times (\mu + (n-2)(\lambda + \varepsilon) + \sigma + \delta) + \\ + n(n-1)\lambda(\lambda + \varepsilon)((n-2)(\lambda + \varepsilon) + \sigma + \delta); \end{cases} \tag{12}$$

$$K_{\Gamma} = \frac{\gamma M}{\gamma M + D}; \quad T_{\text{О}} = \frac{M}{D}; \quad T_{\text{В}} = \frac{1}{\gamma}.$$

4. МОДЕЛЬ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОЙ СИСТЕМЫ ХРАНЕНИЯ ДАННЫХ НА БАЗЕ ДИСКОВОГО МАССИВА С ЗЕРКАЛИРОВАНИЕМ ДАННЫХ

Пусть задана некоторая система хранения данных на базе дискового массива RAID-1 – избыточного массива недорогих дисков с зеркалированием данных (технология mirroring), состоящего из n одинаковых дисков, и резервной копией данных на некотором внешнем хранилище (мы его оставляем за рамками рассматриваемой модели).

Все n дисков хранят одну и ту же информацию, чтение данных может осуществляться с любого диска, запись осуществляется на все диски одновременно. Это позволяет системе хранения данных сохранять работоспособность при отказе вплоть до n – 1 дисков.

Интенсивность отказов дисков λ. Диски могут отказывать независимо друг от друга. Кроме того, пусть при отказе r = 1…n – 1 дисков, помимо базовой интенсивности отказов становится существенной интенсивность ошибок чтения ε диска, с которого осуществляется чтение данных для регенерации информации на отказавших дисках после их замены. Особо отметим, что для регенерации информации достаточно любого одного работоспособного диска с пользовательскими данными независимо от количества отказавших дисков.

Интенсивность регенерация информации (процедура rebuild) на замененном диске составляет μ. Будем считать, что время замены отказавшего диска несущественно по сравнению со временем регенерации информации за счет использования технологии автоматической горячей замены дисков (hot-spare). При отказе нескольких r = 2…n – 1 будем считать, что информация на замененных дисках регенерируется последовательно – сначала регенерируется информация на одном диске, после завершения регенерации начинается регенерация на следующем диске и так далее. Соответственно, после завершения регенерации на очередном диске система переходит из состояния r в состояние r – 1.

Кроме того, пусть в системе возможны критические виды ошибок контроллера дискового массива, которые переводят систему из любого работоспособного состояния напрямую в аварийное состояние. Интенсивность критических ошибок контроллера σ. Более того, при отказе r = 1…n – 1 дисков, на контроллер ложится дополнительная нагрузка в силу необходимости регенерации данных на замененных дисках, и к базовой интенсивности ошибок добавляется дополнительная интенсивность δ.

Наконец, пусть при отказе всех n дисков или критической ошибке дискового контроллера система переходит в аварийное состояние. В этой ситуации требуется замена всех неисправных дисков, повторная инициализация дискового массива (процедура recreate), и восстановление информации из резервного копии внешнего хранилища. Интенсивность восстановления системы из аварийного состояния γ.

Тогда с учетом всего вышесказанного марковская модель отказоустойчивой дисковой системы на базе массива RAID-1 (рис. 10):

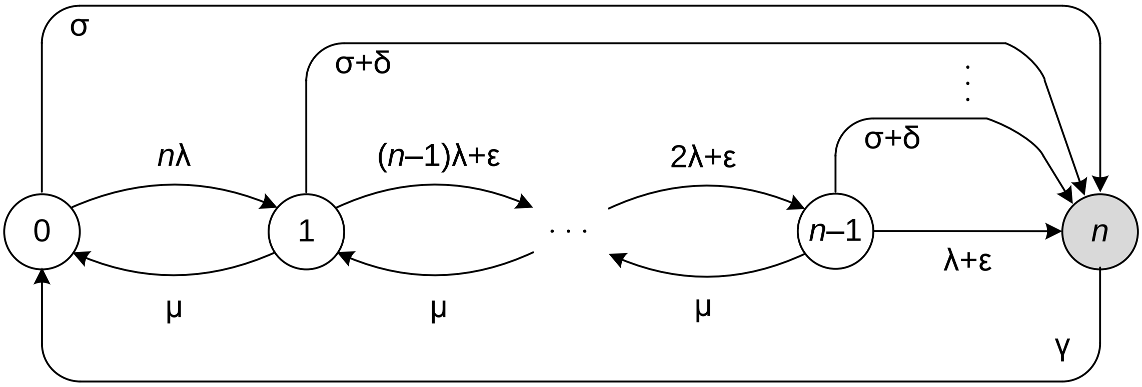

Рис. 10. Граф состояний системы на базе дискового массива RAID-1.

Заметим, что модель системы хранения данных на базе массива RAID-1 может быть получена из рассмотренной выше специальной модели отказоустойчивой системы 1-го типа, полагая s = n и используя следующую подстановку параметров надежности:

$$\begin{cases} \quad j = 1\dots n-1; \\ \lambda_0 = n\lambda; \quad \lambda_j = (n-j)\lambda + \varepsilon; \\ \sigma_0 = \sigma; \quad \sigma_j = \sigma + \delta; \\ \gamma = \gamma; \quad \mu_j = \mu. \end{cases} \tag{13}$$

Тогда, расчет показателей надежности для модели 1-го типа осуществляется по рассмотренной выше рекуррентным формулам 3, полагая s = n и используя подстановку соответствующих исходных параметров надежности системы по формулам 13:

$$
\begin{cases}
U^{(1)} = n\lambda; \quad V^{(1)} = 1; \quad M^{(1)} = 1; \\
W^{(1)} = \sigma; \quad D^{(1)} = n\lambda + \sigma; \\
r = 1 \dots n-1; \\
\begin{cases}
U^{(r+1)} = ((n-r)\lambda + \varepsilon)U^{(r)}; \\
V^{(r+1)} = (\sigma + \delta)M^{(r)} + \mu V^{(r)} + U^{(r)}; \\
M^{(r+1)} = ((n-r)\lambda + \varepsilon)M^{(r)} + V^{(r+1)}; \\
W^{(r+1)} = (\sigma + \delta)D^{(r)} + \mu W^{(r)}; \\
D^{(r+1)} = ((n-r)\lambda + \varepsilon)D^{(r)} + W^{(r+1)};
\end{cases} \\
M = M^{(n)}; \quad D = D^{(n)};
\end{cases}
\qquad (14)
$$

$$
K_\Gamma = \frac{\gamma M}{\gamma M + D}; \quad T_\text{O} = \frac{M}{D}; \quad T_\text{В} = \frac{1}{\gamma}.
$$

5. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ НАДЕЖНОСТИ ДИСКОВ И КОНТРОЛЛЕРА

Для расчета показателей надежности рассмотренной выше отказоустойчивой системы хранения данных помимо количества дисков n и порога аварийного отказа массива s требуются шесть параметров надежности $\lambda, \mu, \varepsilon, \sigma, \delta, \gamma$. Остановимся на них подробнее.

Интенсивность отказов дисков λ нетрудно оценить на основе параметра *MTBF* (среднего времени наработки на отказ), предоставленного производителем дисков или полученного из практического опыта эксплуатации. Следует отметить, что производители часто завышают *MTBF*, указывая более миллиона часов. Практика же показывает, что *MTBF* диска лежит в пределах 50-300 тысяч часов. Соответственно, интенсивность отказов:

$$
\lambda = 1/MTBF_\text{disk}. \qquad (15)
$$

Интенсивность регенерации данных μ для массивов с чередованием данных RAID-5 и RAID-6 зависит от емкости диска V (в байтах), средней скорости записи v_write на диск (в байт/с) и средней скорости расчета v_calc регенерируемых данных (в байт/с) контроллером на основе информации остальных дисков:

$$
\mu = (3600\, v_\text{calc} v_\text{write}) / (V(v_\text{calc} + v_\text{write})). \qquad (16)
$$

Например, для диска емкости 10^{12} байтов, скорости записи $v_\text{write} = 50 \cdot 10^6$ байт/с и скорости расчета регенерируемых данных $v_\text{calc} = 15 \cdot 10^6$ байт/с дискового контроллера, интенсивность регенерации составит $\mu \sim 1/24$ час$^{-1}$ (в среднем регенерация длится 24 часа).

Интенсивность регенерации данных μ для массивов с зеркалированием RAID-1 зависит от емкости диска V (в байтах), средней скорости записи v_write на диск (в байт/с) и средней скорости чтения v_read данных (в байт/с):

$$
\mu = (3600\, v_\text{read} v_\text{write}) / (V(v_\text{read} + v_\text{write})). \qquad (17)
$$

Например, для диска емкости 10^{12} байтов, скорости записи $v_\text{write} = 50 \cdot 10^6$ байт/с и скорости чтения $v_\text{read} = 80 \cdot 10^6$ байт/с, интенсивность регенерации составит $\mu \sim 1/9$ час$^{-1}$ (в среднем регенерация длится 9 часов).

Интенсивность ошибок чтения ε диска можно определить на основе параметра P_UER (вероятности невосстанавливаемой ошибки чтения бита), предоставленного производителем дисков или полученного из практического опыта эксплуатации, емкости диска V (в байтах) и среднего времени регенерации информации, равного $1/\mu$ (в часах). Для дисков персональных компьютеров параметр P_UER составляет ~10^{-14}, для дисков серверных систем ~10^{-15}.

Тогда, учитывая, что при регенерации данных требуется считывать весь диск размером 8V битов, то вероятность ошибки чтения $Q = 1-(1-P_{\mathrm{UER}})^{8V}$. С другой стороны полагая, что время наработки на ошибку – экспоненциально распределенная случайная величина с параметром ε, и регенерация длится в течение $1/\mu$ часов, имеем равенство $Q = 1-e^{-\varepsilon/\mu}$. Тогда, из двух тождеств получаем $\varepsilon = -8V\mu\ln(1-P_{\mathrm{UER}})$. Тогда, учитывая, что P_{UER} очень малая величина, и $\ln(1-P_{\mathrm{UER}}) \sim -P_{\mathrm{UER}}$, окончательно получаем:

$$\varepsilon = 8V\mu P_{\mathrm{UER}}. \tag{18}$$

Например, для диска емкости V = 10^{12} байтов, интенсивности регенерации данных $\mu = 1/24$ час$^{-1}$ и вероятности невосстанавливаемой ошибки чтения бита $P_{\mathrm{UER}} = 10^{-14}$, интенсивность ошибок чтения составит $\varepsilon = 1/300$ час$^{-1}$.

Интенсивность ошибок контроллера σ можно оценить на основе параметра *MTTE* (среднее время наработки на ошибку), предоставленного производителем контроллера дисков или полученного из практического опыта эксплуатации. Практика же показывает, что *MTTE* контроллера обычно составляют миллионы часов. Тогда, интенсивность ошибок:

$$\sigma = 1/MTTE_{\mathrm{con}}. \tag{19}$$

Дополнительная интенсивность ошибок контроллера δ в режиме регенерации данных может быть оценена так же, как и базовая интенсивность σ. В случае отсутствия сведений можно упрощенно полагать, что дополнительная интенсивность равна базовой: $\delta = \sigma$.

Наконец, интенсивность полного восстановления системы γ из аварийного состояния с восстановлением данных из резервной копии зависит от времени, требуемого для создания дискового массива, размера резервной копии, скорости записи данных в дисковый массив, и может быть оценена на основе среднего времени *MTTR*, полученного из практики (занимает от нескольких часов до нескольких суток):

$$\gamma = 1/MTTR_{\mathrm{sys}}. \tag{20}$$

6. ПРИМЕР РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ДИСКОВЫХ МАССИВОВ

Имеется n одинаковых дисков емкости V = 10^{12} байтов. Среднее время наработки на отказ диска составляет $MTBF_{\mathrm{disk}} = 120000$ часов. Вероятность невосстанавливаемой ошибки чтения бита $P_{\mathrm{UER}} = 10^{-14}$. Средняя скорость чтения данных $v_{\mathrm{read}} = 80\cdot 10^6$ байт/с. Средняя скорость записи данных $v_{\mathrm{write}} = 50\cdot 10^6$ байт/с.

Имеется дисковый контроллер, поддерживающий дисковые массивы RAID-0, RAID-5, RAID-6 и RAID-1. Среднее время наработки на критическую ошибку контроллера составляет $MTTE_{\mathrm{con}} = 1200000$ часов. В режиме регенерации информации интенсивность критических ошибок удваивается. Средняя скорость расчета регенерируемой информации в дисковых массивах RAID-5 и RAID-6 составляет $v_{\mathrm{calc}} = 15\cdot 10^6$ байт/с.

При отказе s дисков (s = 1 для RAID-0, s = 2 для RAID-5, s = 3 для RAID-6, s = n для RAID-1) или при критическом отказе контроллера система переходит в аварийное состояние с потерей всей информации на всех дисках. Для предотвращения безвозвратной потери данных в таких случаях выполняется периодическое резервное копирование данных на внешнее хранилище. Среднее время полного восстановления дискового массива, включая восстановление данных из резервной копии, составляет $MTTR_{\mathrm{sys}} = 72$ часа.

Вычислить и сравнить коэффициенты готовности и средние времена наработки на отказ систем хранения данных на базе RAID-массивов с резервной копией данных для случая массивов RAID-0, RAID-5, RAID-6 и RAID-1 с количеством дисков n = 2…6. Для массива RAID-6 рассмотреть два типа регенерации: последовательная регенерация дисков (тип 1) и единый процесс одновременной регенерации всех дисков (тип 2).

Решение. Оценим параметры надежности $\lambda, \mu, \varepsilon, \sigma, \delta, \gamma$, необходимые для расчета показателей надежности отказоустойчивой системы хранения данных.

Интенсивность отказов диска:

$$\lambda = 1/MTBF_{\text{disk}} = 1/120000 \text{ час}^{-1}.$$

Интенсивность регенерации информации в дисковых массивах RAID-5 и RAID-6:

$$\mu = \frac{3600\, v_{\text{calc}} v_{\text{write}}}{V(v_{\text{calc}} + v_{\text{write}})} \sim 1/24 \text{ час}^{-1}.$$

Интенсивность регенерации информации в дисковом массиве RAID-1:

$$\mu = \frac{3600\, v_{\text{read}} v_{\text{write}}}{V(v_{\text{read}} + v_{\text{write}})} \sim 1/9 \text{ час}^{-1}.$$

Интенсивность ошибок чтения данных диска:

$$\varepsilon = 8V\mu P_{\text{UER}} \sim 1/300 \text{ час}^{-1}.$$

Интенсивность критических ошибок контроллера:

$$\sigma = 1/MTTE_{\text{con}} = 1/1200000 \text{ час}^{-1}.$$

Далее, по условию примера, при регенерации данных, интенсивность критических ошибок удваивается, следовательно $\sigma + \delta = 2\sigma$, откуда получаем:

$$\delta = 1/1200000 \text{ час}^{-1}.$$

Наконец, интенсивность полного восстановления системы из аварийного состояния с восстановлением данных из резервной копии:

$$\gamma = 1/MTTR_{\text{sys}} = 1/72 \text{ час}^{-1}.$$

Теперь, имея все исходные параметры надежности и используя формулы 9, 10, 11 и 12 для дисковых массивов RAID-0, 5, 6 (тип 1 и 2), формулу 14 для дискового массива RAID-1, вычисляем коэффициент готовности и среднее время наработки на отказ.

Таблица 1

Коэффициент готовности системы хранения данных

	s	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
RAID-0	1	0,99874159	0,99814345	0,99754603	0,99694933	0,99635335
RAID-5	2	–	0,99969139	0,99947510	0,99921250	0,99891164
RAID-6 (тип 1)	3	–	–	0,99986279	0,99976449	0,99962103
RAID-6 (тип 2)	3	–	–	0,99987568	0,99979881	0,99969005
RAID-1	n	0,99990497	0,99993841	0,99993992	0,99993998	0,99993998

Таблица 2

Среднее время наработки на отказ системы хранения данных (в часах)

	s	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
RAID-0	1	57142	38709	29268	23529	19672
RAID-5	2	–	233232	137096	91356	66082
RAID-6 (тип 1)	3	–	–	524677	305649	189916
RAID-6 (тип 2)	3	–	–	579099	357805	232226
RAID-1	n	757580	1168895	1198355	1199488	1199441

Отметим, что для дисковых массивов с чередованием данных RAID-0, RAID-5 и RAID-6 (обоих типов) средняя наработка на отказ быстро снижается с ростом количества дисков. В пределе средняя наработка на отказ стремится к нулю по закону $\sim \dfrac{s\lambda + \varepsilon}{n\lambda(\lambda + \varepsilon)}$.

Средняя наработка на отказ для дискового массива с зеркалированием данных RAID-1 с ростом количества дисков увеличивается, но быстро упирается в среднюю наработку на ошибку дискового контроллера $\sim 1/\sigma$, являющегося «узким местом» надежности массива.

Полученные в примере численные оценки показателей надежности значительно более реалистичны, нежели чем те, которые могут быть получены по упрощенным формулам при игнорировании ошибок контроллера и ошибок чтения дисков при регенерации данных на замененных дисках. Так, например, среднее время наработки на отказ дискового массива RAID-5 может быть оценено по известной в литературе [3, 4, 5] простой формуле:

$$T_O = \frac{\mu + (2n-1)\lambda}{\lambda^2 n(n-1)}.$$

В частности, для n = 6 дисков, оценка среднего времени наработки на отказ по этой формуле дает 20044000 часов, что в ~300 раз выше, чем оценка 66082 часов, полученная по рассмотренной в данной статье формуле 10.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рамках статьи рассмотрены предложенные автором специальные марковские модели и выведенные формулы для расчета показателей надежности системы, состоящей из множества идентичных восстанавливаемых элементов, переходящей в состояние аварийного отключения с потерей информации при отказе s элементов или критической ошибке схемы управления, и требующей восстановления до исходного полностью исправного состояния.

Также рассмотрены модели отказоустойчивых систем хранения данных на базе RAID-массивов с резервной копией данных, частные случаи дисковых массивов RAID-0, RAID-5, RAID-6 и RAID-1, а также примеры расчета показателей надежности.

Полученные теоретические результаты использовались в многолетней практике проектирования и эксплуатации систем хранения, обработки и передачи данных НИУ МЭИ (ТУ), Балаковской АЭС, ОАО «Красный Пролетарий» и ряда других предприятий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черкесов Г. Н.** Надежность аппаратно-программных комплексов. СПб.: Питер, 2005. **[** G. N. Cherkesov, *Reliability of Hardware and Software Systems*, (in Russian). Saint-Petersburg: Piter, 2005. **]**

2. **Половко А. М.**, **Гуров С. В.** Основы теории надежности. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. **[** A. M. Polovko and S. V. Gurov, *Basis of Reliability Theory*, (in Russian). Saint-Petersburg: BHV-Petersburg, 2006. **]**

3. **Martin L. Shooman**. Reliability of computer systems and networks. John Wiley & Sons Inc., 2002. [Martin L. Shooman, *Reliability of computer systems and networks*, John Wiley & Sons Inc., 2002.]

4. **Israel Koren, C. Mani Krishna**. Fault-Tolerant Systems. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2007. [Israel Koren, C. Mani Krishna, *Fault-Tolerant Systems*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2007.]

5. **Elerath J. G.** Reliability model and assessment of redundant arrays of inexpensive disks (RAID) incorporating latent defects and non-homogeneous Poisson process events. Ph.D. dissertation, University of Maryland, 2007. [Elerath J. G., *Reliability model and assessment of redundant arrays of inexpensive disks (RAID) incorporating latent defects and non-homogeneous Poisson process events*, Ph.D. dissertation, University of Maryland, 2007.]

6. **Каяшев А.И., Рахман П.А., Шарипов М.И.** Анализ показателей надежности избыточных дисковых массивов // Вестник УГАТУ. 2013. Т. 17, № 2 (55). С. 163-170. [A.I. Kayashev, P.A. Rahman, M.I. Sharipov, “Reliability analysis of redundant disk arrays,” (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 17, no. 2 (55), pp. 163-170, 2013.]

7. **Каяшев А.И., Рахман П.А., Шарипов М.И.** Анализ показателей надежности локальных компьютерных сетей // Вестник УГАТУ. 2013. Т. 17, № 5 (58). С. 140-149. [A.I. Kayashev, P.A. Rahman, M.I. Sharipov, “Reliability analysis of local area networks,” (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 17, no. 5 (58), pp. 140-149, 2013.]

8. **Каяшев А.И., Рахман П.А., Шарипов М.И.** Анализ показателей надежности двухуровневых магистральных сетей // Вестник УГАТУ. 2014. Т. 18, № 2 (63). С. 197-207. [A.I. Kayashev, P.A. Rahman, M.I. Sharipov, “Reliability analysis of two-level backbone networks,” (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 18, no. 2 (63), pp. 197-207, 2014.]

Приложение 1. Расчет показателей надежности систем хранения данных на базе массивов с чередованием данных по модели 1 в математическом пакете Maple.

```
> restart; unprotect(gamma);
> with(student):
> # Storage System Markov Model Type 1 (serial repairs)
  # for RAID-0,5,6 analytic formulas Pavel A. Rahman, 2014.
> # Analytic formulas via recurrent algorithm by Pavel A. Rahman
  # Mean Time To Fatal Failure
  MTTFF:= proc(n,s,lambda,epsilon,mu,sigma,delta) local i,r,res,U,V,M,W,D:
    if (s >= 1) then
      U:= n * lambda: V:= 1: M:= 1:
      W:= sigma: D:= n * lambda + sigma:
      for r from 1 to s - 1 do
        V:= (sigma + delta) * M + mu * V + U:
        U:= (n - r) * (lambda + epsilon) * U:
        M:= (n - r) * (lambda + epsilon) * M + V:
        W:= (sigma + delta) * D + mu * W:
        D:= (n - r) * (lambda + epsilon) * D + W:
      end do:
      res:= M / D:
      return(res):
    end if:
  end proc:
  # Mean Time To Full Repair
  MTTFR:= (n,s,gamma) -> 1/gamma:
  # Stationary availibility factor
  KS:= (n,s,lambda,epsilon,mu,sigma,delta,gamma) ->
        MTTFF(n,s,lambda,epsilon,mu,sigma,delta)
        /(MTTFF(n,s,lambda,epsilon,mu,sigma,delta)+MTTFR(n,s,gamma)):
> # Multiple calculation examples
> nmax:= 8:
  DISKMTBF:= 120000: DISKMTTRE:= 300: DISKMTTR:= 24:
  CTRLMTTE:= 1200000: CTRLMTTAE:= 1200000: RAIDMTTR:= 72:
> lambda:= 1/DISKMTBF: sigma:= 1/CTRLMTTE: gamma:= 1/RAIDMTTR:
  epsilon:= 1/DISKMTTRE: delta:= 1/CTRLMTTAE: mu:= 1/DISKMTTR:
> TA:= Matrix(4,nmax,fill=`--`): TA[1,1] := N:
  TA[2,1]:= `RAID-0`: TA[3,1]:= `RAID-5`: TA[4,1]:= `RAID-6`:
  for i from 2 to nmax do TA[1,i]:= i end do:
  for i from 2 to nmax do TA[2,i]:=
      trunc(evalf(MTTFF(i,1,lambda,epsilon,mu,sigma,delta))): end do:
  for i from 3 to nmax do TA[3,i]:=
      trunc(evalf(MTTFF(i,2,lambda,epsilon,mu,sigma,delta))): end do:
  for i from 4 to nmax do TA[4,i]:=
      trunc(evalf(MTTFF(i,3,lambda,epsilon,mu,sigma,delta))): end do:
  print(TA):
```

N	2	3	4	5	6	7	8
RAID-0	57142	38709	29268	23529	19672	16901	14814
RAID-5	--	233232	137096	91356	66082	50590	40356
RAID-6	--	--	524677	305649	189916	126835	90103

```
> KA:= Matrix(4,nmax,fill=`--`): KA[1,1] := N:
  KA[2,1]:= `RAID-0`: KA[3,1]:= `RAID-5`: KA[4,1]:= `RAID-6`:
  for i from 2 to nmax do KA[1,i]:= i end do:
  for i from 2 to nmax do KA[2,i]:=
      evalf(KS(i,1,lambda,epsilon,mu,sigma,delta,gamma)): end do:
  for i from 3 to nmax do KA[3,i]:=
      evalf(KS(i,2,lambda,epsilon,mu,sigma,delta,gamma)): end do:
  for i from 4 to nmax do KA[4,i]:=
      evalf(KS(i,3,lambda,epsilon,mu,sigma,delta,gamma)): end do:
  print(KA):
```

N	2	3	4	5	6	7	8
RAID-0	0.9987415856	0.9981434532	0.9975460367	0.9969493350	0.9963533468	0.9957580706	0.9951635054
RAID-5	--	0.9996913907	0.9994750997	0.9992124992	0.9989116388	0.9985788299	0.9982190909
RAID-6	--	--	0.9998627918	0.9997644919	0.9996210297	0.9994326567	0.9992015550

Приложение 2. Расчет показателей надежности систем хранения данных на базе массивов с чередованием данных по модели 2 в математическом пакете Maple.

```
> restart; unprotect(gamma);
> with(student):
> # Storage System Markov Model Type 2 (entire repairs)
  # for RAID-0,5,6 analytic formulas Pavel A. Rahman, 2014.
> # Analytic formulas via recurrent algorithm by Pavel A. Rahman
  # Mean Time To Fatal Failure
    MTTFF:= (n,s,lambda,epsilon,mu,sigma,delta) -> (add((1/((n-q)
            *(lambda+min(1,q)*epsilon)))*mul(1+(sigma+delta+mu)/((n-q-j)
            *(lambda+epsilon)),j=1..s-1-q),q=0..s-1))
            /(1+add(((sigma+min(1,q)*delta)/((n-q)
            *(lambda+min(1,q)*epsilon)))*mul(1+(sigma+delta+mu)/((n-q-j)
            *(lambda+epsilon)),j=1..s-1-q),q=0..s-1)):
  # Mean Time To Full Repair
  MTTFR:= (n,s,gamma) -> 1/gamma:
  # Stationary availibility factor
  KS:= (n,s,lambda,epsilon,mu,sigma,delta,gamma) ->
       MTTFF(n,s,lambda,epsilon,mu,sigma,delta)
       /(MTTFF(n,s,lambda,epsilon,mu,sigma,delta)+MTTFR(n,s,gamma)):
> # Multiple calculation examples
> nmax:= 8:
  DISKMTBF:= 120000: DISKMTTRE:= 300: DISKMTTR:= 24:
  CTRLMTTE:= 1200000: CTRLMTTAE:= 1200000: RAIDMTTR:= 72:
> lambda:= 1/DISKMTBF: sigma:= 1/CTRLMTTE: gamma:= 1/RAIDMTTR:
  epsilon:= 1/DISKMTTRE: delta:= 1/CTRLMTTAE: mu:= 1/DISKMTTR:
> TA:= Matrix(4,nmax,fill=`--`): TA[1,1] := N:
  TA[2,1]:= `RAID-0`: TA[3,1]:= `RAID-5`: TA[4,1]:= `RAID-6`:
  for i from 2 to nmax do TA[1,i]:= i end do:
  for i from 2 to nmax do TA[2,i]:=
      trunc(evalf(MTTFF(i,1,lambda,epsilon,mu,sigma,delta))): end do:
  for i from 3 to nmax do TA[3,i]:=
      trunc(evalf(MTTFF(i,2,lambda,epsilon,mu,sigma,delta))): end do:
  for i from 4 to nmax do TA[4,i]:=
      trunc(evalf(MTTFF(i,3,lambda,epsilon,mu,sigma,delta))): end do:
  print(TA):
```

N	2	3	4	5	6	7	8
RAID-0	57142	38709	29268	23529	19672	16901	14814
RAID-5	--	233232	137096	91356	66082	50590	40356
RAID-6	--	--	579099	357805	232226	159964	116140

```
> KA:= Matrix(4,nmax,fill=`--`): KA[1,1] := N:
  KA[2,1]:= `RAID-0`: KA[3,1]:= `RAID-5`: KA[4,1]:= `RAID-6`:
  for i from 2 to nmax do KA[1,i]:= i end do:
  for i from 2 to nmax do KA[2,i]:=
      evalf(KS(i,1,lambda,epsilon,mu,sigma,delta,gamma)): end do:
  for i from 3 to nmax do KA[3,i]:=
      evalf(KS(i,2,lambda,epsilon,mu,sigma,delta,gamma)): end do:
  for i from 4 to nmax do KA[4,i]:=
      evalf(KS(i,3,lambda,epsilon,mu,sigma,delta,gamma)): end do:
  print(KA):
```

N	2	3	4	5	6	7	8
RAID-0	0.9987415856	0.9981434532	0.9975460367	0.9969493350	0.9963533468	0.9957580706	0.9951635054
RAID-5	--	0.9996913907	0.9994750997	0.9992124992	0.9989116388	0.9985788299	0.9982190909
RAID-6	--	--	0.9998756845	0.9997988136	0.9996900546	0.9995501016	0.9993804448

Приложение 3. Расчет показателей надежности систем хранения данных на базе массивов с зеркалированием данных по модели 1 в математическом пакете Maple.

```
> restart; unprotect(gamma);
> with(student):
> # Storage System Markov Model Type 1 (serial repairs)
  # for RAID-1 analytic formulas Pavel A. Rahman, 2014.
> # Analytic formulas via recurrent algorithm by Pavel A. Rahman
  # Mean Time To Fatal Failure
  MTTFF:= proc(n,lambda,epsilon,mu,sigma,delta) local i,r,res,U,V,M,W,D:
    if (n >= 1) then
      U:= n * lambda: V:= 1: M:= 1:
      W:= sigma: D:= n * lambda + sigma:
      for r from 1 to n - 1 do
        V:= (sigma + delta) * M + mu * V + U:
        U:= ((n - r) * lambda + epsilon) * U:
        M:= ((n - r) * lambda + epsilon) * M + V:
        W:= (sigma + delta) * D + mu * W:
        D:= ((n - r) * lambda + epsilon) * D + W:
      end do:
      res:= M / D:
      return(res):
    end if:
  end proc:
  # Mean Time To Full Repair
  MTTFR:= (n,gamma) -> 1/gamma:
  # Stationary availibility factor
  KS:= (n,lambda,epsilon,mu,sigma,delta,gamma) ->
       MTTFF(n,lambda,epsilon,mu,sigma,delta)
       /(MTTFF(n,lambda,epsilon,mu,sigma,delta)+MTTFR(n,gamma)):
> # Multiple calculation examples
> nmax:= 8:
  DISKMTBF:= 120000: DISKMTTRE:= 300: DISKMTTR:= 9:
  CTRLMTTE:= 1200000: CTRLMTTAE:= 1200000: RAIDMTTR:= 72:
> lambda:= 1/DISKMTBF: sigma:= 1/CTRLMTTE: gamma:= 1/RAIDMTTR:
  epsilon:= 1/DISKMTTRE: delta:= 1/CTRLMTTAE: mu:= 1/DISKMTTR:
> TA:= Matrix(2,nmax,fill=`--`):
  TA[1,1] := N: TA[2,1]:= `RAID-1`:
  for i from 2 to nmax do TA[1,i]:= i end do:
  for i from 2 to nmax do TA[2,i]:=
      trunc(evalf(MTTFF(i,lambda,epsilon,mu,sigma,delta))): end do:
  print(TA):
```

N	2	3	4	5	6	7	8
RAID-1	757580	1168895	1198355	1199488	1199441	1199350	1199258

```
> KA:= Matrix(2,nmax,fill=`--`):
  KA[1,1] := N: KA[2,1]:= `RAID-1`:
  for i from 2 to nmax do KA[1,i]:= i end do:
  for i from 2 to nmax do KA[2,i]:=
      evalf(KS(i,lambda,epsilon,mu,sigma,delta,gamma)): end do:
  print(KA):
```

N	2	3	4	5	6	7	8
RAID-1	0.9999049696	0.9999384072	0.9999399213	0.9999399780	0.9999399757	0.9999399711	0.9999399665